Un q-analogue de la conjecture d'injectivité de Markoff est vrai

SL, 26 oct 2023, LaBRI

avec Mélodie Lapointe et Wolfgang Steiner
arxiv: 2212.09852

Déf Un <u>triplet de Markoff</u> est une solution entière strictement positive de l'équation

$$x^2+y^2+z^2=3xyz$$

Ex $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,5)$, ...

Déf Un entier est un <u>nombre de Markoff</u> s'il apparaît dans un triplet de Markoff.

Applications en théorie des nombres

<u>Théorème</u> Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Alors $\exists\infty$ $p/q\in\mathbb{Q}$ distincts t.q.

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\begin{cases}\frac{1}{q^2} & \text{(Dirichlet, 1842)}\\ \frac{1}{\sqrt{5}q^2} & \text{(Hurwitz, 1891)}\\ \frac{1}{\sqrt{8}q^2} & \text{si } \alpha=[a_0,a_1,a_2,\dots] \text{ avec } a_n\geq 2 \text{ pour } \infty \text{ de } n\\ \dots & \dots\end{cases}$$

<u>Lagrange spectrum:</u>

$L(\alpha)=\sup\{L : |\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{Lq^2}$ pour ∞ $p/q\in\mathbb{Q}$ distincts$\}$

<u>Rmq:</u>
- $\alpha\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow L(\alpha)=0$
- $\alpha\notin\mathbb{Q}\Leftrightarrow L(\alpha)\geq 1$

$\mathcal{L}=\{L(\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

<u>Théorème (Markoff, 1879, 1880)</u>

$$\mathcal{L}\cap(-\infty,3)=\left\{\sqrt{9-\frac{4}{m^2}} : m \text{ est un nb de Markoff}\right\}$$

Déf $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad\alpha\sim\beta$ si leur dev. frac. continue coïncident éventuellement
i.e. $\alpha=[a_0,a_1,\dots,a_k,\gamma]$ et $\beta=[b_0,b_1,\dots,b_\ell,\gamma]$

<u>Conjecture d'unicité</u> Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ avec $L(\alpha),L(\beta)<3$.
$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow L(\alpha)=L(\beta)$. (énoncé équivalent à la conjecture de Frobenius)

Solutions

$$x^2-(3yz)x+(y^2+z^2)=0$$

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=(-3yz)^2-4\cdot 1\cdot(y^2+z^2)\\&=(3yz)^2-4(3xyz-x^2)\\&=(3yz)^2-12xyz+4x^2\\&=(3yz-2x)^2\end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

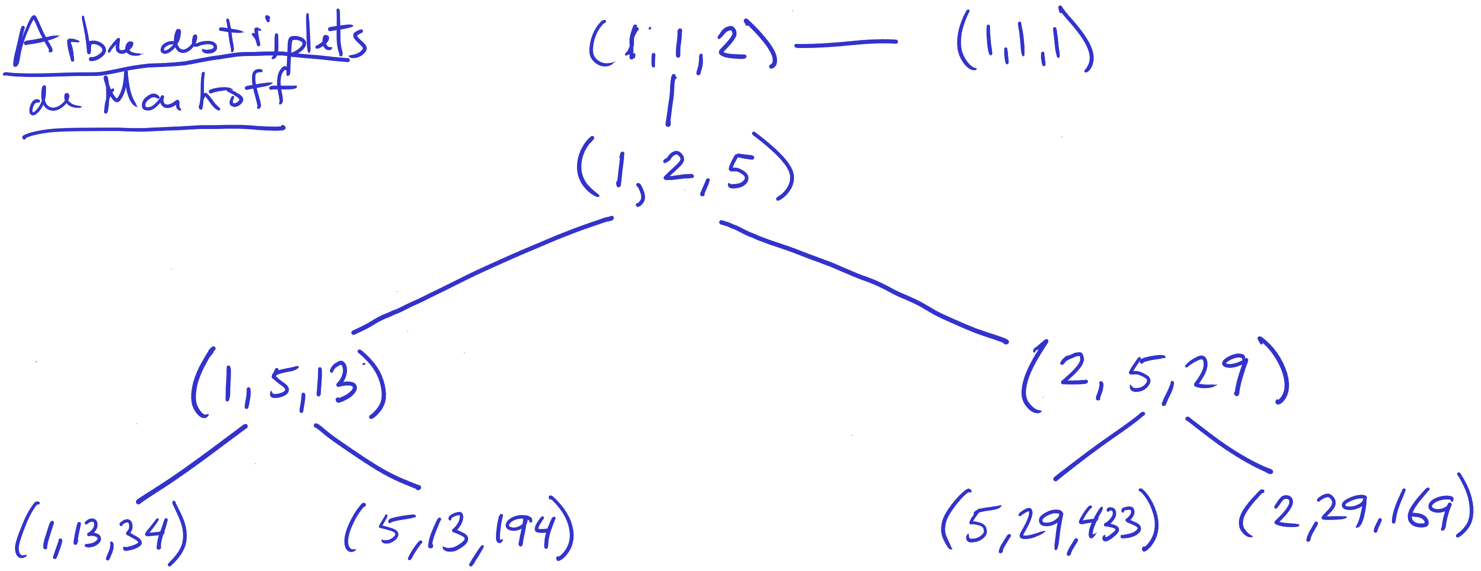
$$=\frac{3yz\pm(3yz-2x)}{2}$$

$$=\frac{6yz-2x}{2} \text{ ou } \frac{2x}{2}$$

$$=3yz-x \text{ ou } x$$

Alors si (x,y,z) est une solution, $(3yz-x,y,z)$ aussi.

Arbre des triplets de Markoff



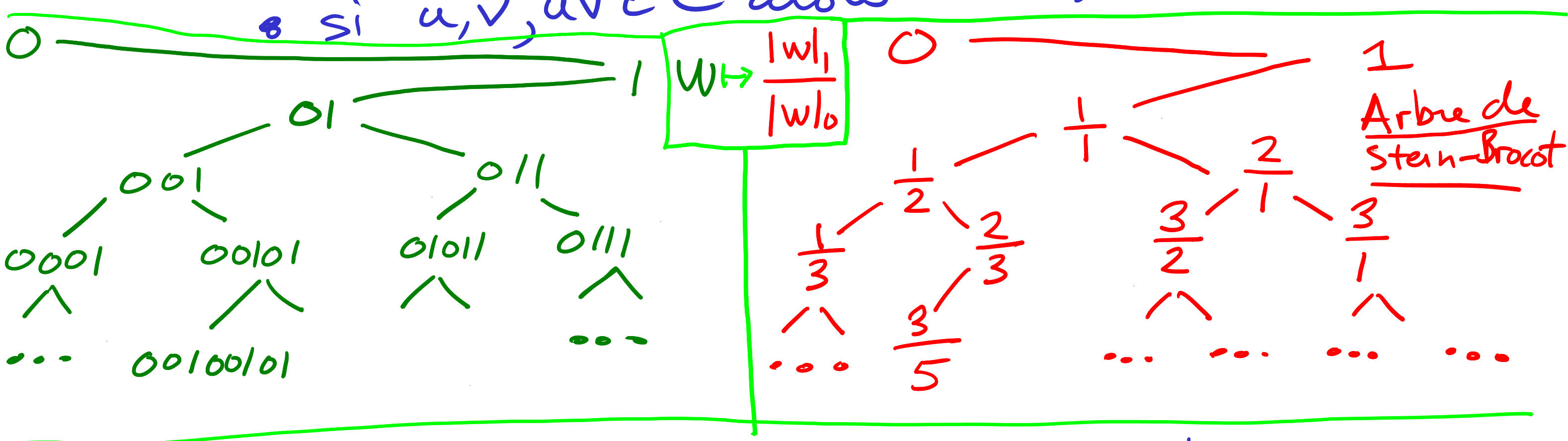
Conjecture (Frobenius, 1913) Un nombre de Markoff est le maximum d'un unique triplet de Markoff.

Ref Aigner (2013), "100 years of the uniqueness conjecture"

Mots de Christoffel

Def L'ensemble $C \subset \{0,1\}^*$ des mots de Christoffel peut être défini comme suit

- $0, 1, 01 \in C$
- si $u, v, uv \in C$ alors $uuv, uvv \in C$.



Soit $\mu : \{0,1\}^* \to SL_2(\mathbb{Z})$ l'homomorphisme

défini par $\mu(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mu(1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Reutenauer (2009) $\forall$ nb de Markoff m $\exists$ mot de Christoffel $w \in C$ t.q. $m = \mu(w)_{12}$

EX $\mu(00101) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 463 & 194 \\ 284 & 119 \end{pmatrix}$

Markoff injectivity conjecture ($\equiv$ conjecture de Frobenius) :
La fonction $w \mapsto \mu(w)_{12}$ est injective sur les mots de Christoffel

q-analogues (suite à Morier-Genoud, Ovsienko, 2020) et ~~#~~ articles qui ont découlé

Soit q une indéterminée.

Soit $L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ et $R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient

$$\mu_q(0) = R_q L_q = \begin{pmatrix} q+q^2 & 1 \\ q & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_q(1) = R_q R_q L_q L_q = \begin{pmatrix} q+2q^2+q^3+q^4 & 1+q \\ q+q^2 & 1 \end{pmatrix}$$

qui s'étend à un morphisme $\{0,1\}^* \to GL_2(\mathbb{Z}[q,q^{-1}])$

Si $w \in$ Christoffel, alors $\mu_q(w)_{12}$ est le <u>q-analogue d'un nombre de Markoff</u>

<u>EX</u> $\mu_q(00101)_{12} = 1+4q+10q^2+18q^3+27q^4+33q^5+33q^6+29q^7+21q^8+12q^9+5q^{10}+q^{11}$

On vérifie que l'évaluation en $q=1$ donne 194.

<u>Théorème (L, Lapointe, Steiner)</u>

La fonction $w \mapsto \mu_q(w)_{12}$ est injective sur l'ensemble des mots de Christoffel.

Idée : évaluer en $q = \beta_K$ où $\beta_K = \exp\left(\frac{2i\pi}{K}\right)$

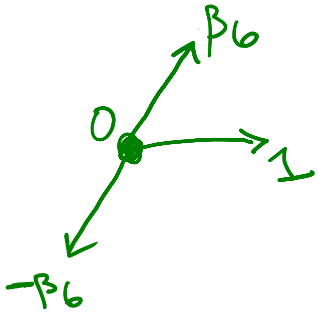
<u>Lemme</u> $\forall w \in \{0,1\}^*$

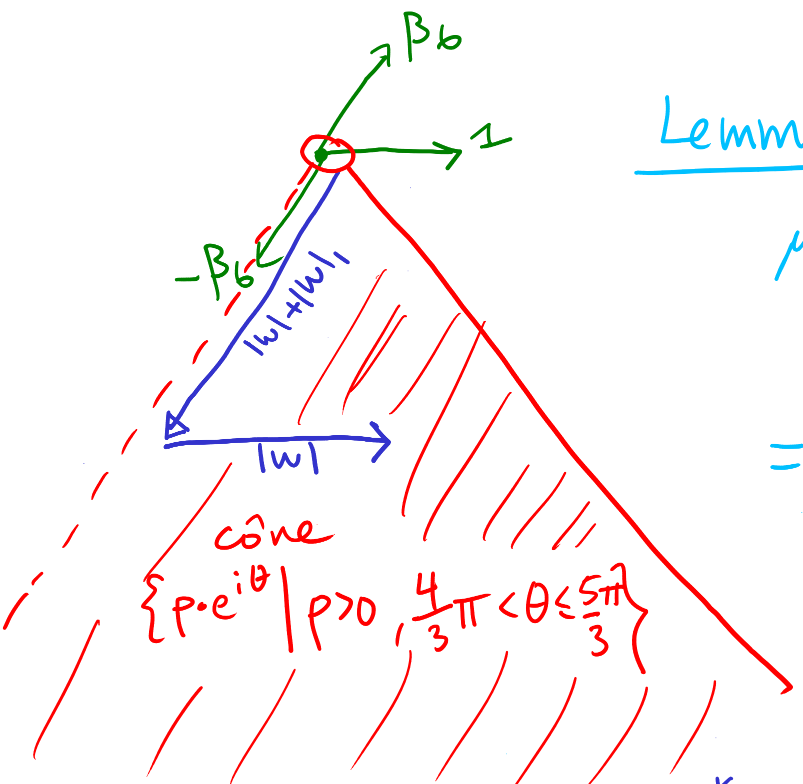
$$\mu_{\beta_6}(w) = \beta_6^{|w|+|w|_1}\left[\begin{pmatrix} |w| & -|w|-|w|_1 \\ -|w|_1 & -|w| \end{pmatrix}\beta_6 + \begin{pmatrix} |w|_1 & |w| \\ |w|+|w|_1 & -|w|_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

<u>Preuve</u> Par récurrence.

En particulier

$$\mu_{\beta_6}(w) = \beta_6^{|w|+|w|_1}\left(|w| - (|w|+|w|_1)\beta_6\right)$$





Lemma

$$\mu_q(w)_{12} = \beta_6^{|w|+|w|_1}\left(|w| - (|w|+|w|_1)\beta_6\right)$$
$$\in e^{i\frac{\pi}{3}(|w|+|w|_1)}\left\{\rho e^{i\theta} \,\middle|\, \rho>0, \tfrac{4}{3}\pi<\theta\leq\tfrac{5\pi}{3}\right\}$$
$$=\left\{\rho e^{i\theta} \,\middle|\, \rho>0, \tfrac{\pi}{3}(|w|+|w|_1+4)<\theta\leq\tfrac{\pi}{3}(|w|+|w|_1+5)\right\}$$

Moreover $w=\varepsilon$ $\iff$ $\mu_{\beta_6}(w)_{12}=0$.

Proposition Soit $w,w'\in\{0,1\}^*$.

$$\mu_{\beta_6}(w)_{12}=\mu_{\beta_6}(w')_{12} \implies \begin{array}{l}|w|_0=|w'|_0\\ |w|_1=|w'|_1\end{array}$$

Preuve Si $\mu_{\beta_6}(w)_{12}=0$, alors $w=\varepsilon=w'$.

Sp que $\mu_{\beta_6}(w)_{12}=\mu_{\beta_6}(w')_{12}=\rho e^{i\theta}\neq 0$.

Par le lemme, on a

$$\tfrac{\pi}{3}(|w|+|w|_1+4)<\theta\leq\tfrac{\pi}{3}(|w|+|w|_1+5)$$
$$\text{et } \tfrac{\pi}{3}(|w'|+|w'|_1+4)<\theta\leq\tfrac{\pi}{3}(|w'|+|w'|_1+5).$$

Donc $|w|+|w|_1 \equiv |w'|+|w'|_1 \pmod 6$.

Donc
$$|w'|-(|w'|+|w'|_1)\beta_6 = \beta_6^{-(|w'|+|w'|_1)}\mu_{\beta_6}(w')_{12}$$
$$= \beta_6^{-|w|-|w|_1}\mu_{\beta_6}(w)_{12}$$
$$= |w|-(|w|+|w|_1)\beta_6$$

Donc $|w'|=|w|$ et $|w'|+|w'|_1=|w|+|w|_1$.

Alors $|w|_0=|w'|_0$ et $|w|_1=|w'|_1$. $\square$

Preuve du théorème Basée sur l'isomorphisme entre l'arbre des mots de Christoffel et l'arbre de Stern-Brocot donné par la fonction $w\mapsto\frac{|w|_1}{|w|_0}$. Il est connu que tout nombre rationnel apparaît une et une seule fois dans l'arbre de SB.

$\underline{\text{Rmq.}}$ La fonction $w \mapsto \mu_q(w)_{12}$ n'est pas injective sur $\{0,1\}^*$.

$\underline{\text{Ex}}$ $\mu_q(00011)_{12} = 1+4q+10q^2+19q^3+27q^4+33q^5+34q^6+29q^7+21q^8+12q^9+5q^{10}+q^{11}$

$= \mu_q(01001)_{12}$

En général

$\underline{\text{Lemme}}$ $\forall w \in \{0,1\}^*$ $\mu_q(0w1)_{12} = \mu_q(0\tilde{w}1)_{12}$

où $\widetilde{w_1 w_2 \cdots w_k} = w_k w_{k-1} \cdots w_1$.

$\underline{\text{À améliorer pour le prochain exposé}}$

"Si (x,y,z) est un triplet de Markoff, alors $(3yz-x, y, z)$ aussi."

- On a bien que $3yz-x>0$, car $3yz-x = \dfrac{y^2+z^2}{x} > 0$.
- Si $x<y<z$, alors

$$3xz-y > 3xz - z = (3x-1)z > z$$

est le nouveau maximum du triplet $(x, z, 3xz-y)$

Aussi

$$3yz-x > 3yz-z = (3y-1)z > z$$

est le nouveau maximum du triplet $(y, z, 3yz-x)$

Toutefois

$$3xy-z < y$$

($\underline{\text{Ref}}$: Lemme 3.1.5 du livre de Christophe ou p.397 dans l'article de Markoff de 1880)

donc y devient le maximum du nouveau triplet $(3xy-z, x, y)$.

$\underline{\text{Dans l'arbre}}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (3xy-z, x, \underline{y}) \arrow[d, dash] & \\
 & (x<y<\underline{z}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(x, z, \underline{3xz-y}) & & (y, z, \underline{3yz-x})
\end{tikzcd}$$

le maximum d'un triplet est souligné en rouge