

Small aperiodic sets of Wang tiles

Sébastien Labbé, mars 2024

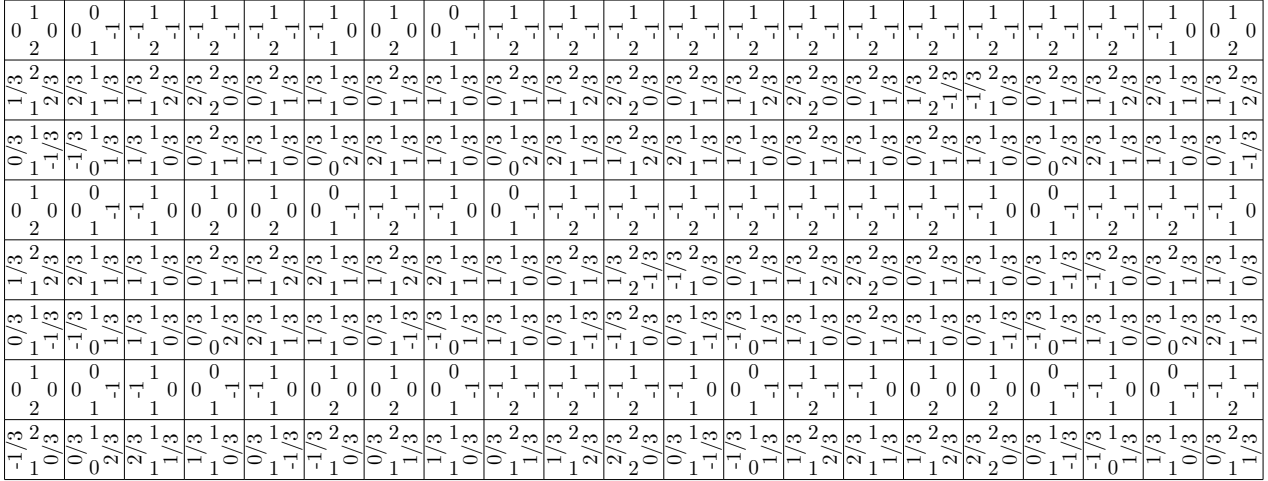
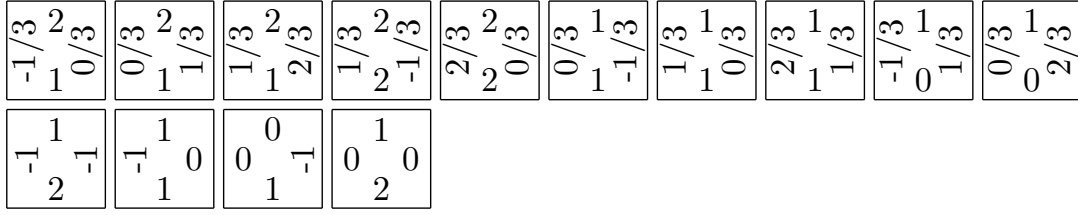


FIGURE 1. Kari's 14 Wang tiles [Kar96] computing $\times_{3/2}$ and $\times 2$ and a rectangular tiling.

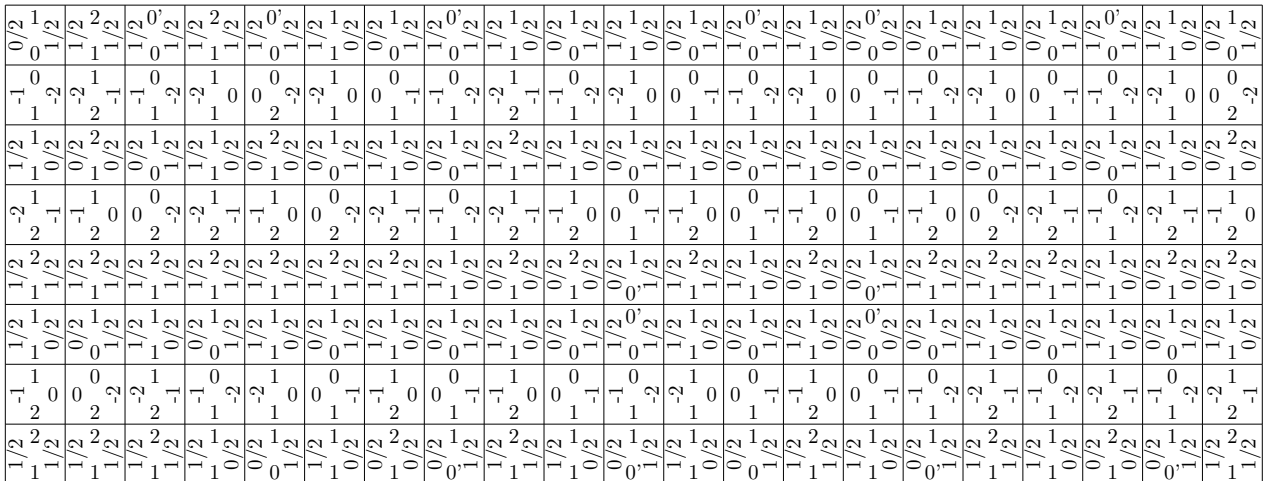
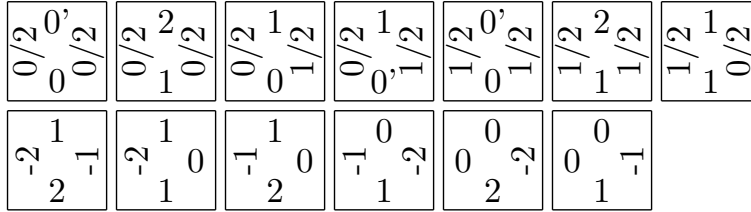


FIGURE 2. Culik's 13 Wang tiles computing $\times_{1/2}$ and $\times 3$ [Cul96] and a rectangular tiling.

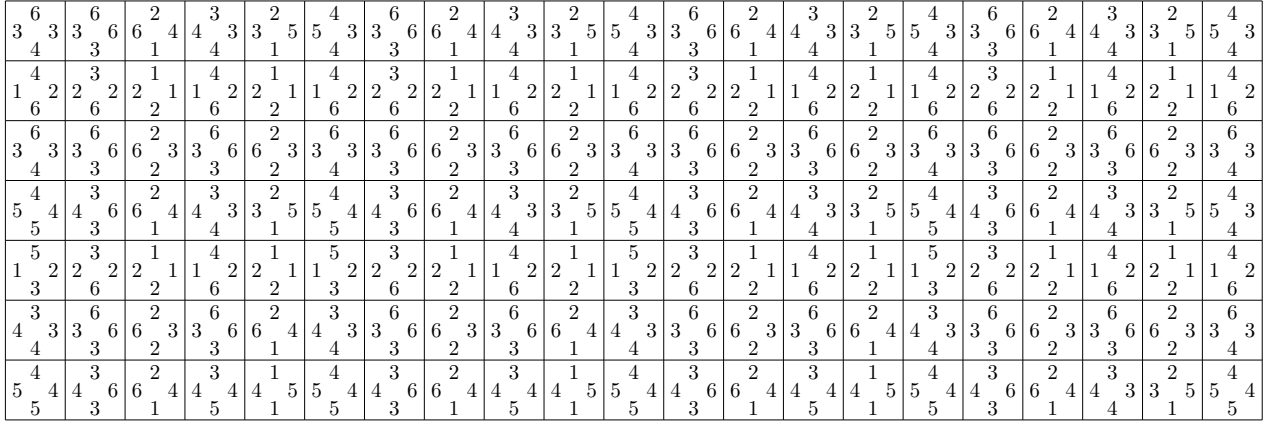
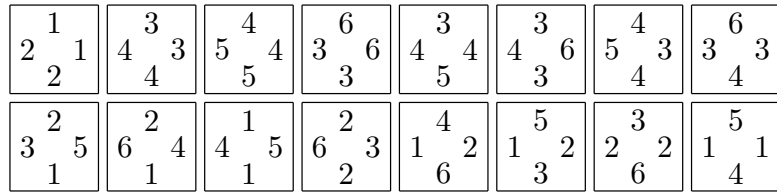


FIGURE 3. Ammann’s 16 Wang tiles [GS87] and a rectangular tiling.

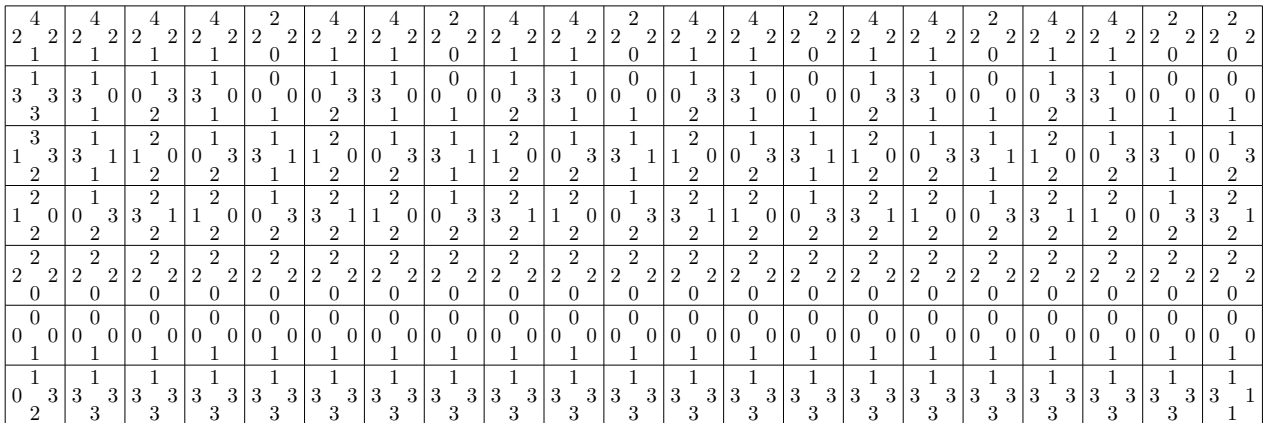
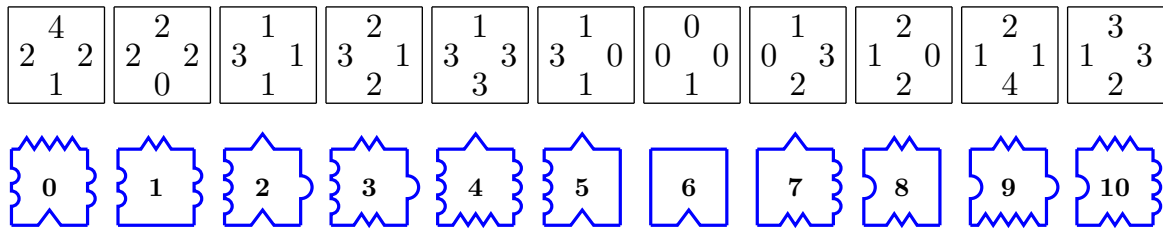


FIGURE 4. Jeandel–Rao’s 11 Wang tiles [JR21], their equivalent geometrical shapes [Lab21] and a rectangular tiling.

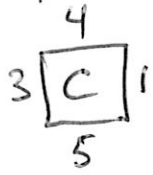
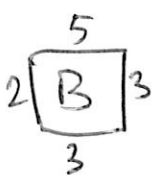
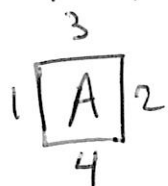
REFERENCES

[Cul96] Karel Culik, II. An aperiodic set of 13 Wang tiles. *Discrete Math.*, 160(1-3):245–251, 1996.
 [GS87] Branko Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
 [JR21] Emmanuel Jeandel and Michaël Rao. An aperiodic set of 11 Wang tiles. *Adv. Comb.*, 2021:37, 2021. Id/No 1.
 [Kar96] Jarkko Kari. A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Math.*, 160(1-3):259–264, 1996.
 [Lab21] Sébastien Labbé. Markov partitions for toral \mathbb{Z}^2 -rotations featuring Jeandel-Rao Wang shift and model sets. *Ann. H. Lebesgue*, 4:283–324, 2021.

Les Petits ensembles de tuiles de Wang aperiódiques

S. Labbé
18 mars 2024
ET CILABRI

Wang (1961) propose les trois "plate" suivantes:



(désormais appelées
tuiles de Wang)

Il observe que la configuration suivante respecte les contraintes sur les côtés:

A B C
C A B
B C A

Aussi les contraintes extérieures sont

3 5 4
1 3 1
3 3 3
2 2 2

On obtient un rectangle cyclique qui permet de paver le plan de façon périodique.

Conjecture (Wang 1961) Un ens. fini de ~~plate~~ tuiles de Wang admet un pavage du plan \Leftrightarrow il admet un rectangle cyclique.

Berger (1966) : la conjecture est fautive:

• Réduction vers le problème de l'arrêt (améliorations: Robinson 1971, Kari 2007, Ollinger 2008, Jeandel Vanier 2020 Greenfeld Tao 2023)

• Existence d'ensemble de tuiles aperiódiques (> 20k tuiles de Wang)
(améliorations: Berger (104), Knuth (192), Robinson (56), Ammann (16), Kari (14), Culik (13), JRII)

Sans compter Penrose (1974), the Hat (2023)

Aujourd'hui:
Ammann (16 tuiles), 1987
Kari (14 tuiles), 1996
Culik (13 tuiles), 1996
Jeandel-Rao (11 tuiles), 2015

à l'oral
car
trop
long

Les 14 tuiles de Kari satisfont à des équations

$$\begin{array}{c} b \\ \square \\ c \quad a \\ d \end{array} \quad q \cdot b + c = d + a$$

où $q \in \mathbb{Q}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. On dit que la tuile multiplie par q l'entrée b dans la sortie d . Les nombres a et c sont des restes.

Ex $-1 \begin{array}{c} 1 \\ \square \\ x2 \\ 2 \end{array} -1 \quad 2 \cdot 1 + (-1) = 2 - 1, \quad \frac{2}{3} \begin{array}{c} 2 \\ \square \\ 0 \\ 2 \end{array} \quad 2 \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 2 + 0, \text{ etc}$

Observation Une ligne de tuiles multipliant toutes par q satisfait

$$\begin{array}{|c|c|} \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & a_1 \quad c_2 & a_2 \\ \hline d_1 & d_3 \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline b_k \\ \hline c_k & a_k \\ \hline d_k \end{array}$$

$$q \cdot b_1 + c_1 = d_1 + a_1$$

$$q \cdot b_2 + c_2 = d_2 + a_2$$

$$\dots$$

$$q \cdot b_k + c_k = d_k + a_k$$

$$q \cdot \frac{b + c_1}{K} = \frac{d + a_k}{K} \iff$$

$$q \sum_{j=1}^k b_j + c_1 = \sum_{j=1}^k d_j + a_k$$

Proposition (Kari) Les 14 tuiles de Kari n'admettent pas de rectangle cyclique.

Preuve Sp $\exists k, l > 0$ entiers et un rectangle cyclique $k \times l$.

$$\begin{array}{|c|} \hline b_{11} \\ \hline c_{11} & a_{11} \\ \hline d_{11} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline b_{1k} \\ \hline c_{1k} & a_{1k} \\ \hline d_{1k} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline b_{l1} \\ \hline c_{l1} & a_{l1} \\ \hline d_{l1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline b_{lk} \\ \hline c_{lk} & a_{lk} \\ \hline d_{lk} \end{array}$$

$$\text{Soit } B_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k b_{ij},$$

$$D_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k d_{ij},$$

$$\text{et } q_i \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\} + q \cdot D_i + \frac{c_i}{k} = q_i \cdot B_i + \frac{a_i}{k}$$

pour tout $1 \leq i \leq l$.

$$\text{Donc } D_l = q_l B_l = q_l D_{l-1} = q_l \cdot q_{l-1} \dots q_1 B_1$$

$$\text{Or } D_l = B_1. \text{ Donc } q_l q_{l-1} \dots q_1 = 1 \text{ avec } q_i \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}.$$

$$\text{Donc } l = 0. \quad \Leftarrow$$



(Kari 2016)

Eigen, Navarro Prasad, 2007

La Représentation équilibrée d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est la suite bi-infinie $B(x)$ où

$$B(x)_i = \lfloor i x \rfloor - \lfloor (i-1)x \rfloor \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Rmq Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $B(x)$ est une suite sturmienne sur l'alphabet $\{ \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil \}$

• $B(x)$ est périodique $\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

Lemme $\forall g \in \mathbb{Q}_{>0} \forall x \in \mathbb{R}$ la suite de tuiles $\{t_{i,x}\}_{i \in \mathbb{Z}}$

$$g \lfloor (i-1)x \rfloor - \lfloor g(i-1)x \rfloor \quad \boxed{t_{i,x}} \quad g \lfloor i x \rfloor - \lfloor g i x \rfloor$$

forme un pavage valide d'une bande horizontale et respecte l'équation $g \cdot N + W = S + E$

Preuve

$$\begin{aligned} g \cdot N + W &= g (\lfloor i x \rfloor - \lfloor (i-1)x \rfloor) + (g \lfloor (i-1)x \rfloor - \lfloor g(i-1)x \rfloor) \\ &= g \lfloor i x \rfloor - \lfloor g(i-1)x \rfloor \\ &= (\lfloor i g x \rfloor - \lfloor (i-1)g x \rfloor) + (g \lfloor i x \rfloor - \lfloor g i x \rfloor) \\ &= S + E \quad \square \end{aligned}$$

Lemme $\forall g \in \mathbb{Q}_{>0} \forall a, b \in \mathbb{Z}$

$$T_{g,a,b} = \left\{ t_{i,x} \mid i \in \mathbb{Z}, x \in [a, a+1], g x \in [b, b+1] \right\}$$

est un ens. fini de tuiles de Wang. \square

Lemme L'ens de Kari est $T_{2,0,1} \cup T_{\frac{2}{3},1,1} \cup T_{\frac{2}{3},1,0}$. \square

Proposition L'ens de tuiles de Kari admet des pavages du plan.

Preuve Soit $g: [\frac{1}{2}, 2] \rightarrow [\frac{1}{2}, 2]$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un pavage d'une bande dont les étiquettes supérieures sont $B(x)$ et inférieures $B(g(x))$.

La fonction ~~est surjective et~~ admet des orbites bi-infinies $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$$\dots x_{-1} \xrightarrow{g} x_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{g} x_2 \dots$$

telles que $x_{i+1} = g(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$.

On construit un pavage du plan telle que la i -ème ligne est un pavage valide dont les étiquettes supérieures sont $B(x_i)$ et inférieures sont $B(x_{i+1})$. \square

RMQ: La fonction g restreinte à $[\frac{2}{3}, 2]$ est surjective!

Lemme (Durand, Gamard, Grandjean, 2017)

Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. tout motif rectangulaire $n \times n$ d'un pavage de Kari-Culik [de type $x^2, x^{\frac{1}{3}}$] contient une occurrence de

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & & \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{0}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$A_1' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & & \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{0}{3} \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ou } A_2' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & & \\ \hline \frac{0}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{0}{3} \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 0 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array}$$

Théorème (Durand, Gamard, Grandjean, 2017)

L'ensemble des pavages de Kari-Culik est d'entropie positive.

Corollaire: Kari-Culik pas substititif.