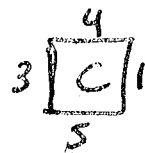
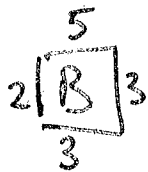
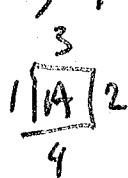


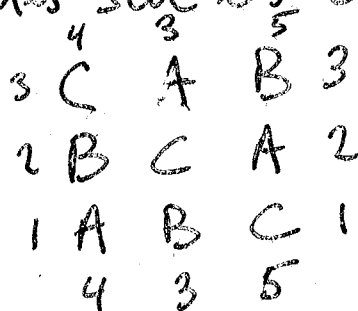
Tuiles de Wang ^{apériodiques} associées aux nombres métalliques (IMB, 4oct 2024 S.6166)

Wang (1961) propose les trois "plate" suivantes:



(désormais appelées tuiles de Wang)

Il observe que la configuration suivante respecte les contraintes sur les côtés intérieurs et extérieurs:



On obtient un rectangle cyclique qui permet de pavé le plan de façon périodique.

Conjecture (Wang, 1961) Un ens. fini de tuiles de Wang admet un pavage du plan \Leftrightarrow il admet un rectangle cyclique.

Berger (1966): la conjecture est fautive. \exists ens. apériodique

Remarque: \exists configuration périodique $\Leftrightarrow \exists$ rectangle cyclique

Preuve: [...]

Def Un ens. de tuile de Wang T est apériodique si $\mathcal{R}_T = \{w: \mathbb{Z}^2 \rightarrow T \mid w \text{ valide}\} \neq \emptyset$ et $\forall w \in \mathcal{R}_T$ w n'a pas de période non triviale.

Petits ensembles apériodiques connus:

- 16 Ammann (16 tuiles) (1987)
- 14 Kari (1996)
- 13 Culik (1996)
- 11 Jeandel-Rao (2015)
- ≥ 11 — 11 —

tuiles géométriques

- 2 Penrose (1976)
- 1 Smith (2023)
- 2 Ammann (1980's)
- 1* Taylor (2011)

Théorème (dédit de Durand, Gamard, Grandjean 2017)
 (Voir Aussi Sieben (2017))

La fonction

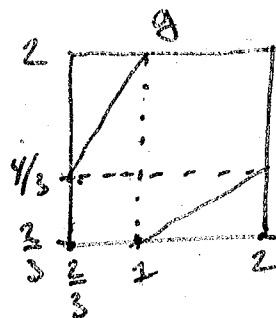
$$F: \mathbb{Z}_{kari} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$w \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \text{TOP}(w_{i,0})$$

est bien définie. De plus, c'est un facteur (continue, surjective) qui satisfait $F \circ \sigma^2 = g \circ F$

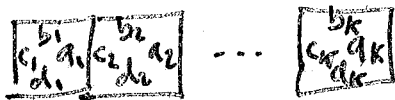
où $g: [\frac{2}{3}, 2] \rightarrow [\frac{2}{3}, 2]$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x, & \text{sinon} \end{cases}$$



et $F \circ \sigma^2 = F$.

Dédit de l'observation: Une ligne de tuiles multipliant par $q \in \mathbb{Q}$ satisfait



$$q \cdot b_1 + c_1 = d_1 + a_1$$

$$q \cdot b_2 + c_2 = d_2 + a_2$$

$$\dots$$

$$q \cdot b_k + c_k = d_k + a_k$$

$$\underline{q \sum_{i=1}^k b_i + c_1 = \sum_{i=1}^k d_i + a_k}$$

Définition des tuiles métalliques

Soit $n \geq 1$ entier.

$$V_n = \{ (N_0, v_1, v_2) \in \mathbb{N}^3 \mid 0 \leq v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq n+1 \text{ et } v_i \leq i \}$$

$$\Theta_n: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{Z}^3$$

$$(u_0, u_1, u_2), (v_0, v_1, v_2) \mapsto (r_0, r_1, r_2)$$

où
$$\begin{cases} r_0 = u_0 \\ r_1 = \begin{cases} v_2 - n & \text{si } u_0 = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ r_2 = \begin{cases} v_1 + u_0 & \text{si } v_0 = 0 \\ u_2 + 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Cela définit un ensemble de tuiles de Wang:

$$C_n = \left\{ u \begin{array}{c} \Theta_n(v,u) \\ \square \\ \Theta_n(u,v) \\ v \end{array} \mid u, v \in V_n \text{ and } \Theta_n(u,v), \Theta_n(v,u) \in V_n \right\}$$

Note: $\Theta_n(1u, u_2, 1v, v_2) = 11(u_2+1) =: 11\bar{u}_2$

$\Theta_n(0u, u_2, 0v, v_2) = 0(v_2-n)v_1$

$\Theta_n(0u, u_2, 1v, v_2) = 0(v_2-n)(u_2+1)$

$\Theta_n(1u, u_2, 0v, v_2) = 11(v_1+1)$

Lemme

Proposition: $C_n = W_n \cup J_n' \cup B_n' \cup Y_n \cup G_n \cup A_n$
 $\cup \hat{B}_n \cup \hat{Y}_n \cup \hat{G}_n \cup \hat{A}_n$
 où $\hat{\square}_b^a = d \square_c^b$

Lemme Dans une configuration valide $w: \mathbb{Z}^2 \rightarrow C_n$, les tuiles suivantes n'apparaissent pas:

$A_n \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{00n} \text{---} \text{00n} \\ \text{11n} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{000} \\ \text{00n} \text{---} \text{011} \\ \text{01n} \end{array} \right\}$ et leurs images sous miroir σ .

Définition Soit $T_n \subset C_n$ l'ensemble restant de $n^2 + 2(n+n+n+1) + 7 = n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$ tuiles.

Théorème Lorsque $n=1$, l'ensemble T_1 de 16 tuiles est équivalent à l'ens. de 16 tuiles d'Ammann,

Preuve: $1 \rightarrow 112, 2 \rightarrow 111, 3 \rightarrow 001, 4 \rightarrow 011, 5 \rightarrow 012, 6 \rightarrow 000. \square$

Théorème Soit $d = (0, -1, 1)$. La fonction

$$\Phi_n: \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$$

$$w \longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \left(\langle \frac{1}{n}d, \text{RIGHT}(w_{0,i}) \rangle \right)$$

$$\left(\langle \frac{1}{n}d, \text{TOP}(w_{i,0}) \rangle \right)$$

est une fonction facteur (continue et surjective) presque partout injective qui satisfait

$$\Phi_n \circ \sigma^k = R_n^k \circ \Phi_n \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

où $R_n: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$
 $(k, x) \mapsto x + \beta k$

avec β racine positive de $x^2 - nx - 1$.

Théorème $\forall n \geq 1$ Ω_n est auto-similaire, a-périodique, et minimal.
 ($\exists \neq \emptyset X \subset \Omega_n$ fermé et σ -invariant)
 alors $X = \Omega_n$)

Metallic mean Wang tiles [Lab23; Lab24]

Notation: $\bar{i} = i+1$

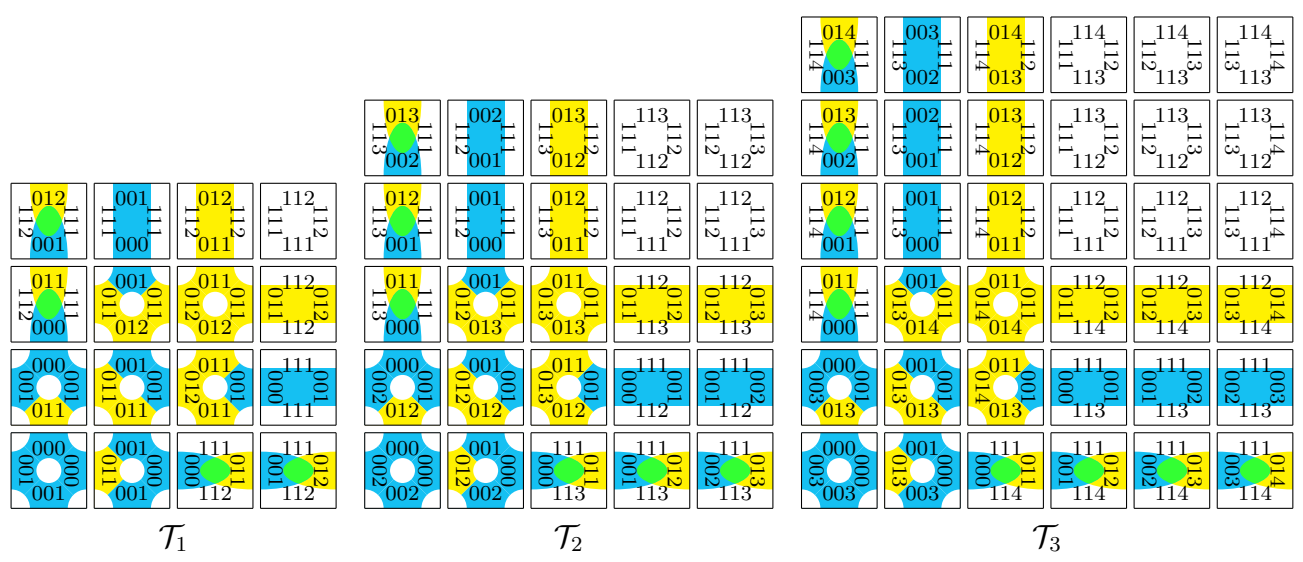
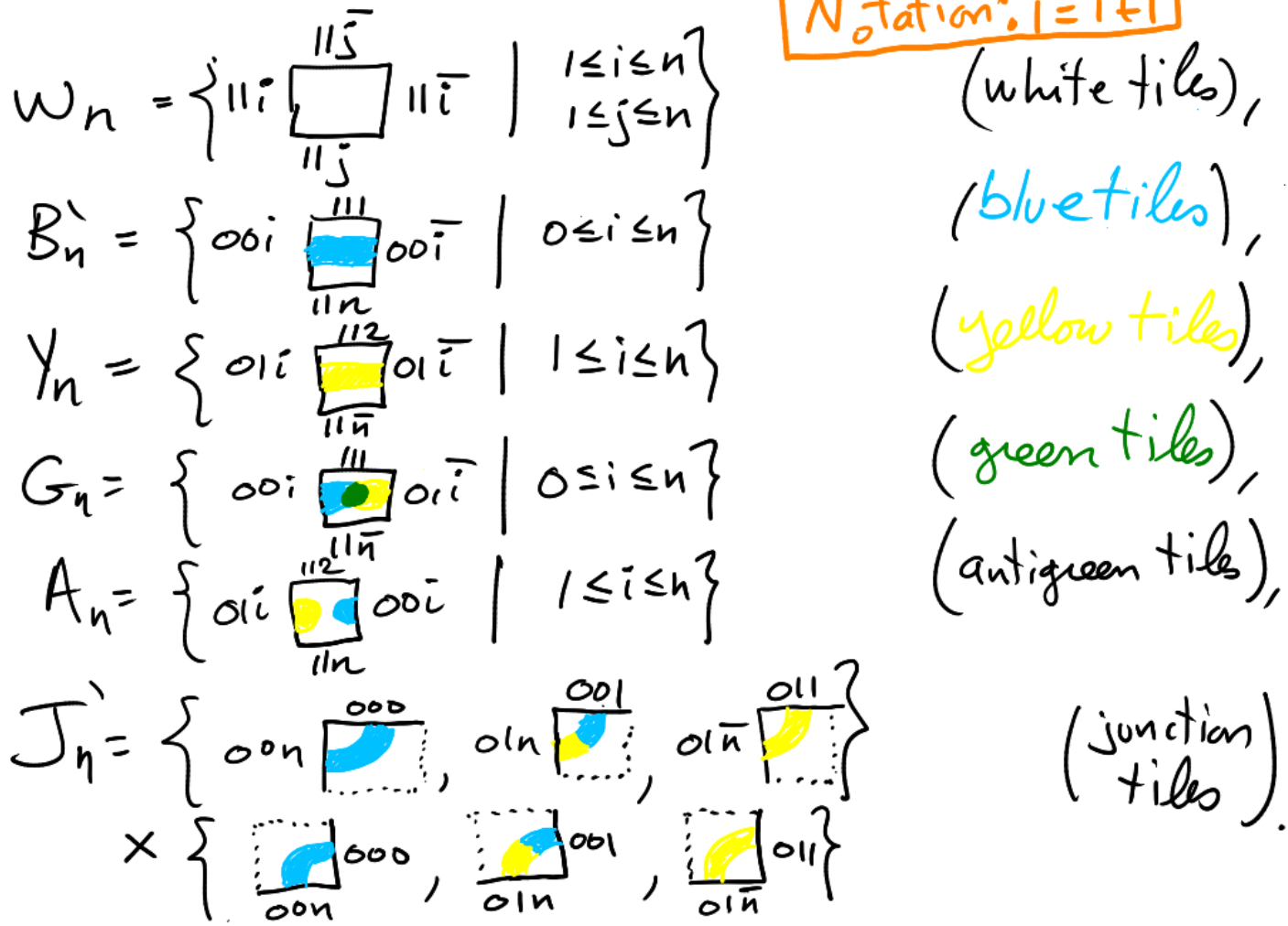


FIGURE 1. Metallic mean Wang tile sets \mathcal{T}_n for $n = 1, 2, 3$.

References.

[Lab23] S. Labbé. Metallic mean Wang tiles I: self-similarity, aperiodicity and minimality, December 2023. [arxiv:2312.03031](#)
 [Lab24] S. Labbé. Metallic mean Wang tiles II: the dynamics of an aperiodic computer chip, March 2024. [arxiv:2403.03111](#)

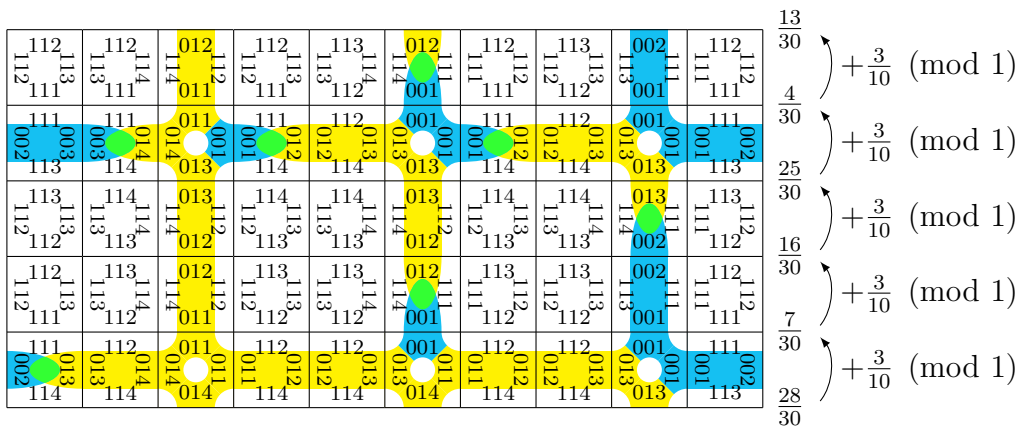


FIGURE 2. A valid rectangular tiling with the set \mathcal{T}_n with $n = 3$. The numbers in the right margin are the average of the inner products $\langle \frac{1}{n}d, v \rangle$ over the vectors v appearing as top (or bottom) labels of a horizontal row of tiles and where $d = (0, -1, 1)$.

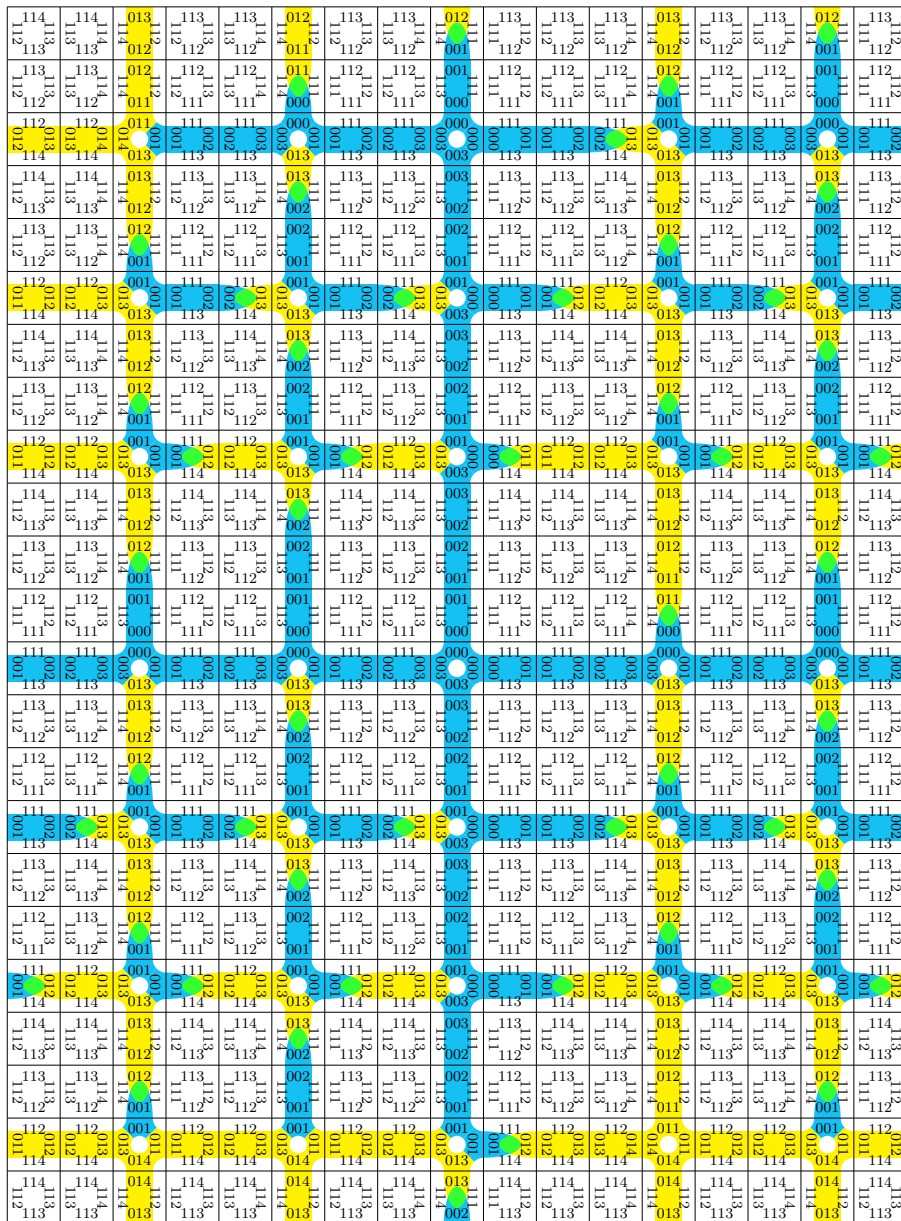


FIGURE 3. A valid 17×23 pattern with Wang tile set \mathcal{T}_3 .